$g_n(t) = t^n \sin t$. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.g_n(t)dt$.

1/ Justifier l'existance de I_n.

2/ En intégrant par parties, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t)dt$ puis en déduire I_1.

3/ Montrer que $\forall n \in IN^*; I_{n+2} + (n+2)(n+3)I_n = (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}$

4/ En déduire la valeur de I_3.

C- Soit h une fonction continue sur IR et Ψ la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} \Psi(x) = \frac{2}{x}\int_0^x t.h(t)dt & \text{si } x \neq 0 \\ \Psi(0) = h(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1/ On suppose qu'il existe un réel M>0 tel que pour tout réel x et pour tout réel t variant entre 0 et x ,on a : $|h(t)| \leq M$.

a- Montrer que ,$\forall x \in IR^*$ on a $\left|\int_0^x t.h(t)dt\right| \leq M\frac{x^2}{2}$.

b- En déduire que si $h(0) = 0$ alors Ψ est continue en 0.

2/a- Expliciter,pour tout réel x ,la fonction Ψ dans le cas ou $h(t)=\sin^2 t$

b- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2 + 1 - 2x\sin 2x - \cos 2x}{4x}$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 2

1) $z = \frac{1}{2}\left[\sin\varphi + i(1-\cos\varphi)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(2\frac{\varphi}{2}) + i(1-\cos(2\frac{\varphi}{2}))\right]$

$= \frac{1}{2}[2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + i(2\sin^2\frac{\varphi}{2})]$

$= \sin\frac{\varphi}{2}[\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}] = \sin\frac{\varphi}{2}e^{i(\frac{\varphi}{2})}$.

• $\varphi \in [-\pi,\pi] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ d'où $\sin(\frac{\varphi}{2}) \in [-1;1]$.

Premier car : $0 \leq \varphi < \pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$ d'où $\sin(\frac{\varphi}{2}) > 0$

par suite la forme trigonométrique de z est $z = \left[\sin(\frac{\varphi}{2}) ; \frac{\varphi}{2}\right]$.

Deuxième cas : $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$

$\Rightarrow z = 0$ n'a pas de forme trigonométrique.

Troisième cas : $-\pi < \varphi < 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\varphi}{2} < 0$ donc $\sin(\frac{\varphi}{2}) < 0$

D'où $z = \left[-\sin\frac{\varphi}{2}; \pi + \frac{\varphi}{2}\right]$.

2) $\otimes\ z - i = \frac{1}{2}[\sin\varphi + i(1-\cos\varphi)] - i = \frac{1}{2}[\sin\varphi + i(-\cos\varphi - 1)]$

$= \frac{1}{2}[2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - i2\cos^2\frac{\varphi}{2}]$

$= \cos\frac{\varphi}{2}[\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2}]$